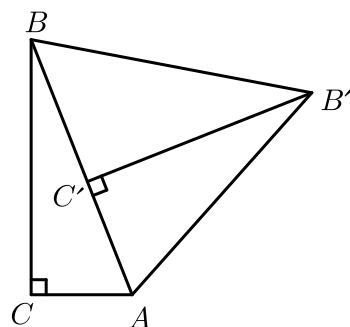


第1讲 旋转基础（练习）

一、旋转与中心对称

练习

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle BAC = 70^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 70° ， B 、 C 旋转后的对应点分别是 B' 和 C' ，连接 BB' ，则 $\angle BB'C'$ 的度数是（ ）。



- A. 35° B. 40° C. 45° D. 50°

【答案】 A

【解析】 $\because AB = AB'$ ，

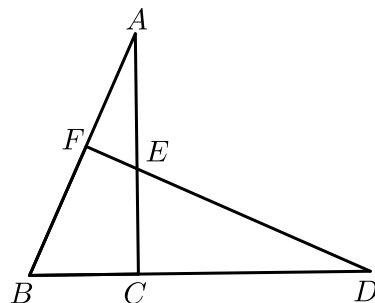
$$\therefore \angle ABB' = \angle AB'B = \frac{180^\circ - \angle BAB'}{2} = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ,$$

在直角 $\triangle BB'C'$ 中， $\angle BB'C' = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$ 。

故选A。

【标注】 【知识点】 旋转的性质

2. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到 $\triangle DEC$ ，使点 B 的对应点 E 恰好落在边 AC 上，点 A 的对应点为 D ，延长 DE 交 AB 于点 F ，则下列结论一定正确的是（ ）。



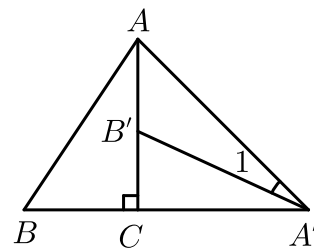
- A. $AC = DE$ B. $BC = EF$ C. $\angle AEF = \angle D$ D. $AB \perp DF$

【答案】D

【解析】 $\because \triangle DEC$ 是由 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转得到的，
 $\therefore AC = DC, BC = EC, \angle D = \angle A$. 故A、B、C错误；
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle B + \angle D = 90^\circ$.
 $\therefore \angle BFD = 90^\circ$ ，
则 $AB \perp DF$ ，故D正确.
故选D.

【标注】【知识点】旋转的性质

3. 如图，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle A'B'C$ ，连接 AA' ，若 $\angle 1 = 20^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数是（ ）.



A. 70°

B. 65°

C. 60°

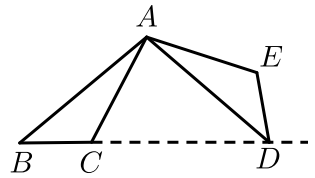
D. 55°

【答案】B

【解析】 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕直角顶点 C 顺时针旋转 90° 得到 $\triangle A'B'C$ ，
 $\therefore AC = A'C$ ，
 $\therefore \triangle ACA'$ 是等腰直角三角形，
 $\therefore \angle CAA' = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle A'B'C = \angle 1 + \angle CAA' = 20^\circ + 45^\circ = 65^\circ$ ，
由旋转的性质得 $\angle B = \angle A'B'C = 65^\circ$.

【标注】【知识点】旋转的性质

4. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 100° ，得到 $\triangle ADE$. 若点 D 在线段 BC 的延长线上，则 $\angle B$ 的大小为（ ）.



A. 30°

B. 40°

C. 50°

D. 60°

【答案】 B

【解析】 $\because$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 100° ，得到 $\triangle ADE$ ，

$$\therefore AB = AD,$$

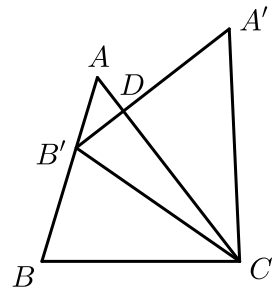
$\therefore \triangle ABD$ 为等腰三角形，

$$\text{又} \because \angle BAD = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 40^\circ.$$

【标注】【知识点】旋转的性质

5. 如图，把 $\triangle ABC$ 绕 C 点顺时针旋转 35° ，得到 $\triangle A'B'C$ ， $A'B'$ 交 AC 于点 D ，若 $\angle A'DC = 90^\circ$ ，则 $\angle A = \underline{\quad\quad}^\circ$ 。



【答案】 55

【解析】 $\because \triangle ABC$ 绕 C 点顺时针旋转 35° 到 $\triangle A'B'C$ ，

$$\therefore \angle A'CD = 35^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A'DC = 90^\circ,$$

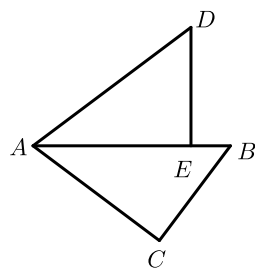
$$\therefore \angle A' = 55^\circ,$$

由旋转的性质可得， $\angle A = \angle A' = 55^\circ$ 。

【标注】【知识点】旋转的性质

练习

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转，使点 C 落在线段 AB 上的点 E 处，点 B 落在点 D 处，则 B 、 D 两点间的距离为（ ）。



- A. $\sqrt{10}$ B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $2\sqrt{5}$

【答案】 A

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是直角三角形，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5,$$

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转得到 $\triangle ADE$ ，

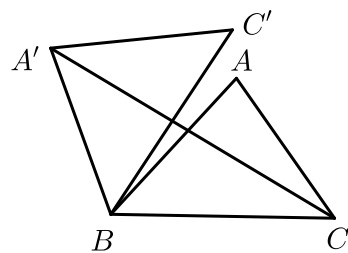
$$\therefore BC = DE = 3, AC = AE = 4,$$

$$\therefore BE = AB - AE = 1,$$

$$\therefore B、D \text{ 两点间的距离为 } \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

【标注】【知识点】利用旋转求线段长

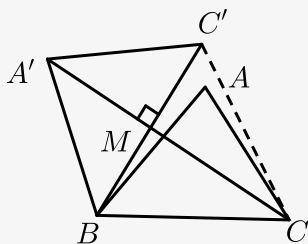
7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 B 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'BC'$ ，连接 $A'C$ ，则 $A'C$ 的长为（ ）。



- A. 6 B. $4 + 2\sqrt{3}$ C. $4 + 3\sqrt{3}$ D. $2 + 3\sqrt{3}$

【答案】 C

【解析】 如图，连接 CC' ，



由旋转可知 $\triangle BCC'$ 为等边三角形，

$$\therefore CC' = CB = 6,$$

$$\text{又} \because AB' = A'C' = 5,$$

$$\therefore A'C \text{ 垂直平分 } BC',$$

$$\therefore BM = C'M = 3,$$

$$\therefore A'M = \sqrt{A'C'^2 - C'M^2} = 4,$$

$$CM = \sqrt{CC'^2 - C'M^2} = 3\sqrt{3},$$

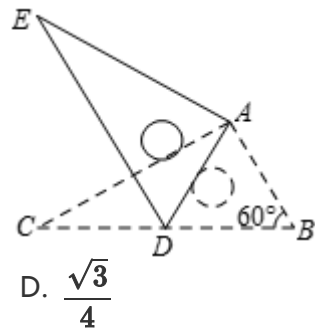
$$\therefore AC' = 4 + 3\sqrt{3},$$

故选C.

【标注】【知识点】旋转的性质

【知识点】等边三角形的性质

8. 如图，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点A按顺时针旋转一定角度得到 $\text{Rt}\triangle ADE$ ，点B的对应点D恰好落在BC边上，若 $AB = 1$ ， $\angle B = 60^\circ$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积为（ ）.



A. $2\sqrt{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

【答案】D

【解析】 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕点A按顺时针旋转一定角度得到 $\text{Rt}\triangle ADE$,

$$\therefore AD = AB,$$

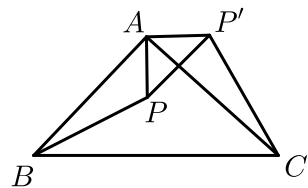
$$\because \angle B = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ABD$ 为等边三角形，

$$\therefore \triangle ABD \text{ 的面积} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

【标注】【知识点】旋转求周长和面积

9. 如图， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， BC 是斜边， P 为 $\triangle ABC$ 内一点，将 $\triangle ABP$ 绕点 A 逆时针旋转后与 $\triangle ACP'$ 重合，如果 $AP = 3$ ，那么线段 PP' 的长等于 _____ .



【答案】 $3\sqrt{2}$

【解析】方法一：由题意可得： $\triangle APP'$ 为等腰直角三角形，则 PP' 为 $3\sqrt{2}$.

方法二：由旋转的性质，得 $\triangle APB \cong \triangle AP'C$,

$\therefore AP' = AP = 3$, $\angle BAP = \angle CAP'$,

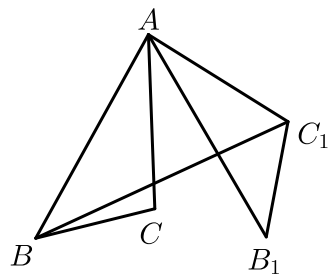
$\therefore \angle CAP' + \angle PAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle PAP'$ 是直角三角形 ,

故由勾股定理得 $PP' = \sqrt{PA^2 + P'A^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】利用旋转求线段长

10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 4$, $AC = 3$, $\angle BAC = 30^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB_1C_1$, 连接 BC_1 , 则 BC_1 的长为 _____ .



【答案】5

【解析】 $\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle AB_1C_1$,

$\therefore AC = AC_1 = 3$, $\angle CAC_1 = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAC_1 = 90^\circ$,

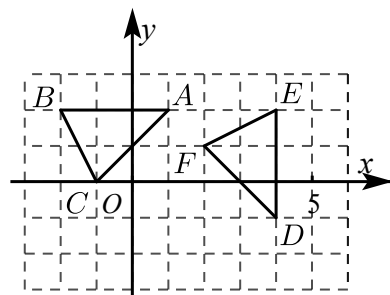
$\therefore BC_1 = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

故答案为：5 .

【标注】【知识点】旋转的性质

练习

11. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， $\triangle ABC$ 顶点的横、纵坐标都是整数．若将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心，顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$ ，则旋转中心的坐标是（ ）．



- A. (0, 0) B. (1, 0) C. (1, -1) D. (2.5, 0.5)

【答案】C

【解析】 $\because$ 将 $\triangle ABC$ 以某点为旋转中心，顺时针旋转 90° 得到 $\triangle DEF$ ，

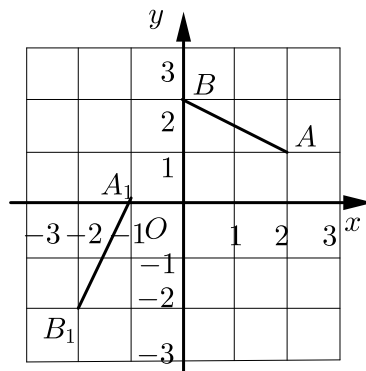
$\therefore$ 点 A 的对应点为点 D ，点 B 的对应点为点 E ，

作线段 AD 和 BE 的垂直平分线，它们的交点为 $P(1, -1)$ ，

$\therefore$ 旋转中心的坐标为 $(1, -1)$ ．

故选C．

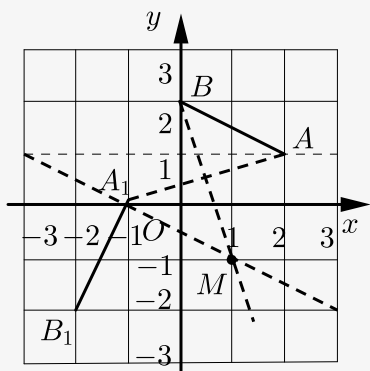
12. 如图，已知点 $A(2, 1)$ ， $B(0, 2)$ ，将线段 AB 绕点 M 逆时针旋转到 A_1B_1 ，点 A 与 A_1 是对应点，则点 M 的坐标是（ ）．



- A. (0, -2) B. (1, -1) C. (0, 0) D. (-1, -1)

【答案】B

【解析】如图，点 M 的坐标是 $(1, -1)$ ，



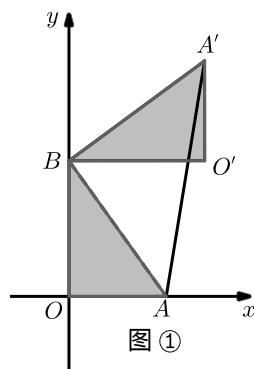
故选B.

【标注】【知识点】确定旋转中心

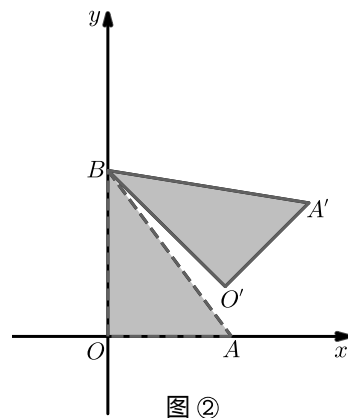
练习

13. 在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $A(3, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ，把 $\triangle ABO$ 绕点 B 逆时针旋转，得 $\triangle A'BO'$ ，点 A ， O 旋转后的对应点为 A' ， O' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图①，若 $\alpha = 90^\circ$ ，求 AA' 的长。



(2) 如图②，若 $\alpha = 45^\circ$ ，求点 O' 的坐标。



【答案】(1) $5\sqrt{2}$.

(2) $O'(2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$.

【解析】(1) 如图1,

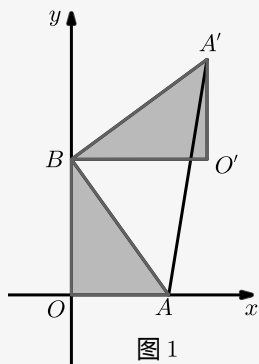


图 1

$OB = 4$, $OA = 3$,

Rt $\triangle AOB$ 中, $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 = A'B$, $\alpha = 90^\circ$,

Rt $\triangle A'BA$ 中, $AA' = \sqrt{AB^2 + A'B^2} = 5\sqrt{2}$.

(2) 如图2, 设 $O'(x, y)$, 过 O' 作 $O'C \perp y$ 轴, 交 y 轴于 C ,

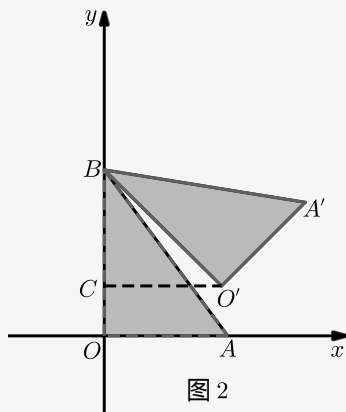


图 2

$\angle CBO' = \alpha = 45^\circ$,

$\therefore \triangle O'CB$ 为等腰直角三角形,

$2x^2 = O'B^2 = 16$,

$x^2 = 8$, $x = \pm 2\sqrt{2}$,

O' 在第一象限 $x = 2\sqrt{2} < 3$,

$OC = OB - BC = 4 - 2\sqrt{2}$,

$\therefore O'(2\sqrt{2}, 4 - 2\sqrt{2})$.

【标注】【知识点】旋转的性质

14. 在平面直角坐标系中, O 为原点, 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$, 把 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转, 得 $\triangle AB'O'$, 点 B , O 旋转后的对应点为 B' , O' . 记旋转角为 α .

(1) 如图①, 若 $\alpha = 90^\circ$, 求 BB' 的长.

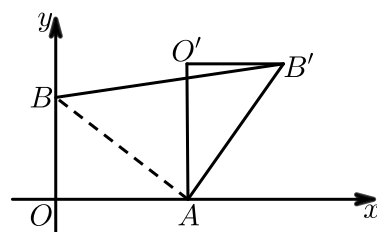


图 ①

(2) 如图②, 若 $\alpha = 120^\circ$, 求点 O' 的坐标.

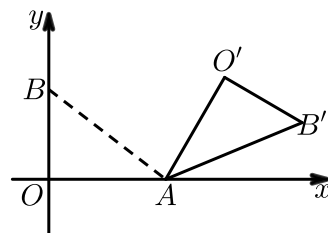


图 ②

【答案】 (1) $BB' = 5\sqrt{2}$.

(2) $(6, 2\sqrt{3})$.

【解析】 (1) 如图①,

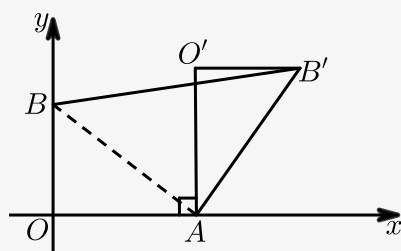


图 ①

$\because$ 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 3)$,

$\therefore OA = 4, OB = 3$,

在 $Rt\triangle ABO$ 中, 由勾股定理得 $AB = 5$,

根据题意 $\triangle ABO$ 绕点 A 顺时针旋转, 得 $\triangle AB'O'$,

由旋转的性质可得: $\angle BAB' = 90^\circ, A'B = AB = 5$,

$\therefore BB' = 5\sqrt{2}$.

(2) 如图②, 过 O' 作 $O'D \perp x$ 轴于 D , 则 $\angle O'DA = 90^\circ$,

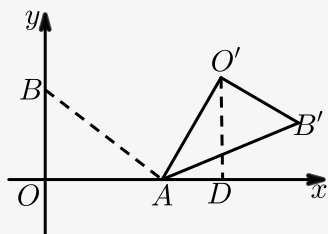


图 ②

由旋转的性质可得： $\angle O'AO = 120^\circ$ ， $O'A = OA = 4$ ，
 在 $Rt\triangle O'AD$ 中， $\angle O'AD = 60^\circ$ ， $\angle AO'D = 30^\circ$ ，
 $\therefore AD = \frac{1}{2}O'A = 2$ ，
 由勾股定理 $O'D = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore OD = OA + OD = 4 + 2 = 6$ ，
 $\therefore$ 点 O' 的坐标为 $(6, 2\sqrt{3})$ 。

【标注】【知识点】旋转性质综合应用

练习

15. 下列标志中，可以看作是中心对称图形的是（ ）。



【答案】B

【解析】根据中心对称的定义可得：A、C、D都不符合中心对称的定义。
 故选B。

【标注】【知识点】中心对称图形的定义

16. 下列标志中，可以看作是中心对称图形的是（ ）。



【答案】D

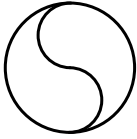
【解析】观察可知，只有选项D中的图形为中心对称图形。

故选D.

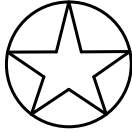
【标注】【知识点】中心对称图形的定义

17. 下列图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）.

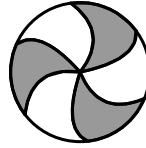
A.



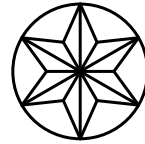
B.



C.



D.



【答案】D

【解析】A 选项：是中心对称图形，不是轴对称图形，故A错误；

B 选项：是轴对称图形，不是中心对称图形，故B错误；

C 选项：是中心对称图形，不是轴对称图形，故C错误；

D 选项：既是中心对称图形，又是轴对称图形，故D正确；

故选 D.

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

18. 下列标志图中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）.

A.



B.



C.



D.



【答案】B

【解析】A 选项：

∵此图形旋转 180° 后能与原图形重合，∴此图形是中心对称图形，不是轴对称图形，故A错误；

B选项：∵此图形旋转 180° 后能与原图形重合，∴此图形是中心对称图形，也是轴对称图形，故B正确；

C选项：此图形旋转 180° 后不能与原图形重合，此图形不是中心对称图形，是轴对称图形，故C错误；

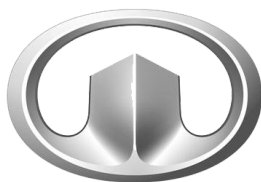
D选项：∵此图形旋转 180° 后不能与原图形重合，∴此图形不是中心对称图形，也不是轴对称图形，故D错误。

故选 B。

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

19. 下列所给的汽车标志图案中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是（ ）。

A.



B.



C.



D.



【答案】 B

【解析】 A选项：根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解．是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

B选项：既是轴对称图形，又是中心对称图形，故本选项正确；

C选项：是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误；

D选项：是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误。

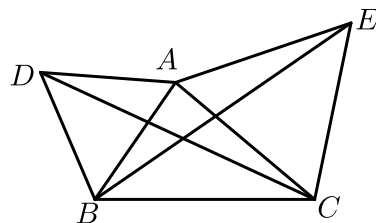
故选 B。

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

二、手拉手模型

练习

20. 如图， $\triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ 都是等边三角形．求证： $BE = DC$ ．

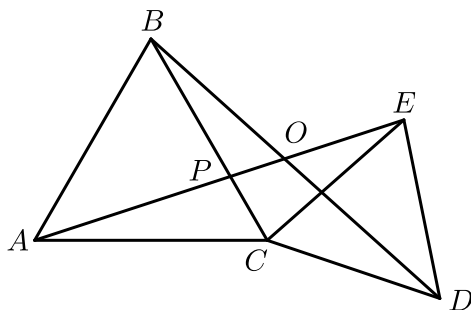


【答案】证明见解析．

【解析】 $\because \triangle ABD$ ， $\triangle ACE$ 是等边三角形，
 $\therefore AD = AB$ ， $AE = AC$ ，
 $\therefore \angle DAB = 60^\circ$ ， $\angle EAC = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle DAB = \angle EAC$ ，
 又 $\because \angle DAC = \angle DAB + \angle BAC$ ，
 $\angle EAB = \angle EAC + \angle BAC$ ，
 $\therefore \angle DAC = \angle EAB$ ，
 $\therefore \triangle DAC \cong \triangle BAE$ (SAS)，
 $\therefore BE = DC$ ．

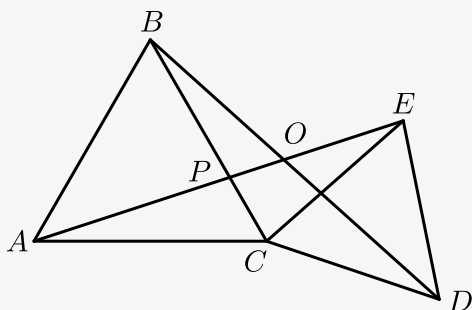
【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

21. 如图， $\triangle ABC$ 、 $\triangle CDE$ 均为等边三角形，连接 BD 、 AE 交于点 O ， BC 与 AE 交于点 P ．求证： $\angle AOB = 60^\circ$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等边三角形，



$\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$

$\therefore \angle ACB + \angle ACE = \angle DCE + \angle ACE,$

即 $\angle ACD = \angle BCE,$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中, $\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE \\ CD = CE \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE (\text{SAS}),$

$\therefore \angle CAD = \angle CBE,$

$\therefore \angle APO = \angle BPC,$

$\therefore \angle AOP = \angle BCP = 60^\circ,$ 即 $\angle AOB = 60^\circ.$

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

22. 如图1, 已知线段 AB 的长为 $2a$, 点 P 是 AB 上的动点 (P 不与 A, B 重合), 分别以 AP, PB 为边向线段 AB 的同一侧作正 $\triangle APC$ 和正 $\triangle PBD$.

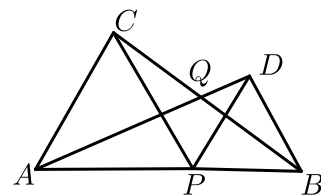


图 1

(1) 连接 AD, BC , 相交于点 Q , 求证: $\triangle APD \cong \triangle CPB.$

(2) 设 $\angle AQC = \beta$, 那么 β 的大小是否会随点 P 的移动而变化? 请说明理由.

(3) 如图2, 若点 P 固定, 将 $\triangle PBD$ 绕点 P 按顺时针方向旋转 (旋转角小于 180°), 此时 β 的大小是否发生变化? 并说明理由.

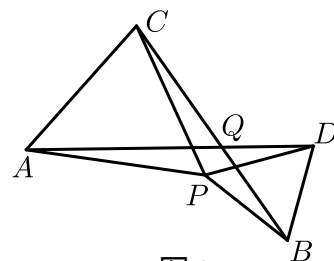


图 2

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 不会, 证明见解析.

(3) 不发生改变, 证明见解析.

【解析】(1) $\because \triangle ACP$ 与 $\triangle PDB$ 为等边三角形,

$$\therefore PA = PC, PD = PB, \angle APC = \angle BPD,$$

$$\therefore \angle APC + \angle CPD = \angle CPD + \angle BPD,$$

$$\text{即 } \angle APD = \angle BPC,$$

$\therefore$ 在 $\triangle APD$ 与 $\triangle CPB$ 中

$$\begin{cases} AP = CP \\ \angle APD = \angle BPC, \\ PD = PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APD \cong \triangle CPB (\text{SAS}).$$

(2) β 的大小不会随点 P 的移动而变化,

理由:

$$\because \triangle APD \cong \triangle CPB,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle PCB,$$

$$\text{又 } \because \angle QAP + \angle QAC + \angle ACP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle QCP + \angle QAC + \angle ACP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AQC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

(3) 此时 β 的大小不会发生改变, 始终等于 60° ,

理由:

$\because \triangle APC$ 是等边三角形,

$$\therefore PA = PC, \angle APC = 60^\circ,$$

又 $\because \triangle BDP$ 是等边三角形,

$$\therefore PB = PD, \angle BPD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle APC = \angle BPD,$$

$$\therefore \angle APD = \angle CPB,$$

$$\therefore \triangle APD \cong \triangle CPB,$$

$$\therefore \angle PAD = \angle PCB,$$

$$\text{又 } \because \angle QAP + \angle QAC + \angle ACP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle QCP + \angle QAC + \angle ACP = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle AQC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

23. 如图1, 点C为线段AB上一点, $\triangle ACM$ 、 $\triangle CBN$ 是等边三角形, 直线AN、MC交于点E, 直线BM、CN交于点F.

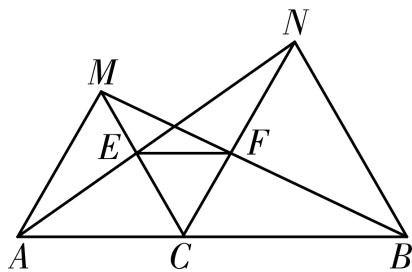


图1

- (1) 求证: $AN = MB$.
- (2) 求证: $\triangle CEF$ 为等边三角形.
- (3) 将 $\triangle ACM$ 绕点C按逆时针方向旋转 90° 到图2所示位置, 其他条件不变, 请补全图形, 并判断(1)、(2)题中的两结论是否依然成立. 并说明理由.

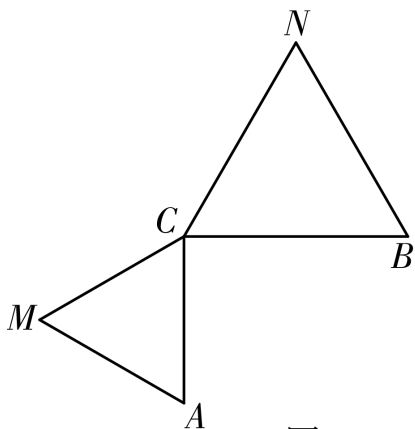


图2

【答案】 (1) 见解析

(2) 见解析

(3) 见解析

【解析】 (1) $\because \triangle ACM, \triangle CBN$ 是等边三角形,

$$\therefore AC = MC, BC = NC, \angle ACM = \angle NCB = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM + \angle MCN = \angle NCB + \angle MCN,$$

$$\text{即 } \angle ACN = \angle MCB,$$

在 $\triangle CAN$ 和 $\triangle CMB$ 中,

$$\begin{cases} AC = MC \\ \angle ACN = \angle MCB, \\ NC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAN \cong \triangle CMB(\text{SAS}),$$

$$\therefore AN = BM.$$

(2) $\because \triangle CAN \cong \triangle CMB$,

$\therefore \angle CAN = \angle CMB$,

又 $\because \angle MCF = 180^\circ - \angle ACM - \angle NCB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$,

$\therefore \angle MCF = \angle ACE$,

在 $\triangle CAE$ 和 $\triangle CMF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle CAE = \angle CMF \\ CA = CM \\ \angle ACE = \angle MCF \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle CAE \cong \triangle CMF (ASA)$,

$\therefore CE = CF$,

$\therefore \triangle CEF$ 为等腰三角形 ,

又 $\because \angle ECF = 60^\circ$,

$\therefore \triangle CEF$ 为等边三角形 .

(3) 解 : 连接 AN , BM ,

$\because \triangle ACM$ 、 $\triangle CBN$ 是等边三角形 ,

$\therefore AC = MC$, $BC = CN$, $\angle ACM = \angle BCN = 60^\circ$,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACN = \angle MCB$,

在 $\triangle ACN$ 和 $\triangle MCB$ 中 ,

$$\begin{cases} AC = CM \\ \angle ACN = \angle MCB \\ CN = BC \end{cases} ,$$

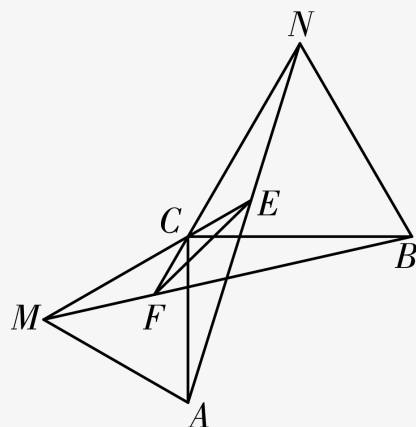
$\therefore \triangle ACN \cong \triangle MCB (SAS)$,

$\therefore AN = MB$.

当把 MC 逆时针旋转 90° 后 , AC 也旋转了 90° , 因此 $\angle ACB = 90^\circ$, 很显然

$\angle FCE > 90^\circ$, 因此 $\triangle FCE$ 绝对不可能是等边三角形 ,

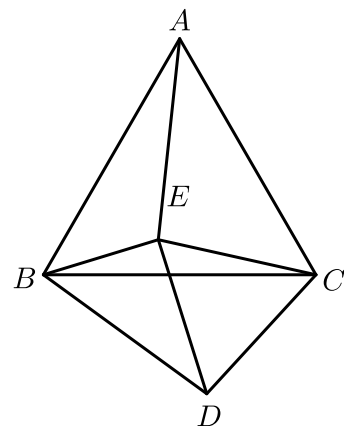
即(1)中结论成立 , (2)中结论不成立 .



【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

练习

24. 如图，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，且 $\angle EBD = 65^\circ$ ，求 $\angle AEB$ 的度数。



【答案】 125° .

【解析】 手拉手全等为 $\triangle CDB \cong \triangle CEA$ (SAS) ,

$$\therefore \angle CBD = \angle CAE ,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle EBC + \angle CBD = 65^\circ ,$$

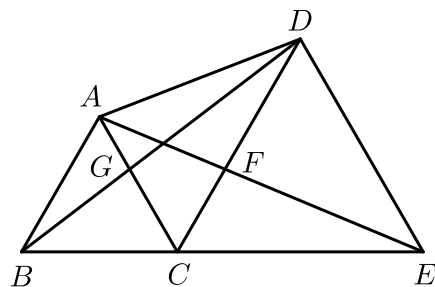
$$\therefore \angle EBC + \angle CAE = 65^\circ ,$$

$$\text{飞镖模型：} \angle AEB = \angle CAE + \angle ACB + \angle CBE = 65^\circ + 60^\circ = 125^\circ .$$

【标注】 【知识点】 等边三角形的手拉手模型

练习

25. 如图，点 B 、 C 、 E 在同一条直线上， $\triangle ABC$ 与 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，则下列结论不一定成立的是（ ）。



- A. $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ B. $\triangle BGC \cong \triangle AFC$ C. $\triangle DCG \cong \triangle ECF$ D. $\triangle ADB \cong \triangle CEA$

【答案】 D

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 都是等边三角形，

$$\therefore BC = AC, CE = CD, \angle BCA = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BCA + \angle ACD = \angle ECD + \angle ACD,$$

$$\text{即} \angle BCD = \angle ACE,$$

$$\therefore \text{在} \triangle BCD \text{和} \triangle ACE \text{中} \begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE \\ CD = CE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

故A成立，

$$\therefore \angle DBC = \angle CAE,$$

$$\because \angle BCA = \angle ECD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\text{在} \triangle BGC \text{和} \triangle AFC \text{中} \begin{cases} \angle CAE = \angle CBD \\ AC = BC \\ \angle ACB = \angle ACD = 60^\circ \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BGC \cong \triangle AFC,$$

故B成立，

$$\because \triangle BCD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle CDB = \angle CEA,$$

$$\text{在} \triangle DCG \text{和} \triangle ECF \text{中} \begin{cases} \angle CDB = \angle CEA \\ CE = CD \\ \angle ACD = \angle DCE = 60^\circ \end{cases},$$

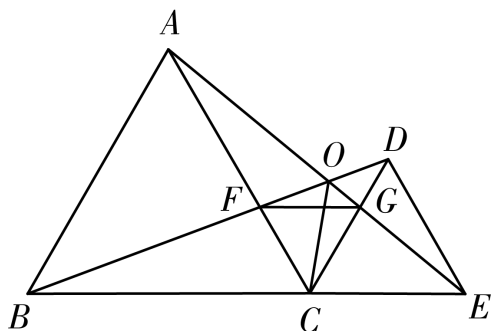
$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle ECF,$$

故C成立，

故选：D.

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

26. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 均是等边三角形，点 B, C, E 在同一条直线上， AE 与 BD 交于点 O ， AE 与 CD 交于点 G ， AC 与 BD 交于点 F ，连接 OC, FG ，则下列结论：① $\triangle ACE \cong \triangle BCD$ ；② $AG = BO$ ；③ $FG \parallel BE$ ；④ $\angle BOA = 60^\circ$ ；⑤ OC 平分 $\angle BOE$ 。其中正确的有 _____。



【答案】①③④⑤

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 均是等边三角形，

$$\therefore BC = AC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle ACD + \angle DCE, \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD \text{ (SAS)}, \text{ 故①正确；}$$

$$\therefore AE = BD, \angle CBD = \angle CAE,$$

$$\therefore \angle BFC = \angle AFO,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle AOB = 60^\circ, \text{ 故④正确；}$$

$$\therefore \angle BCA = \angle ACG = 60^\circ, AC = BC,$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle ACG \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AG = BF, \text{ 故②错误；}$$

$$\therefore CF = CG,$$

$$\therefore \angle ACD = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle CFG \text{ 是等边三角形，}$$

$$\therefore \angle CFG = \angle FCB = 60^\circ,$$

$$\therefore FG \parallel BE, \text{ 故③正确；}$$

过 C 作 $CM \perp AE$ 于 M ， $CN \perp BD$ 于 N ，

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle AEC,$$

$$\therefore CD = CE, \angle CND = \angle CMA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle CDN \cong \triangle CEM,$$

$$\therefore CM = CN,$$

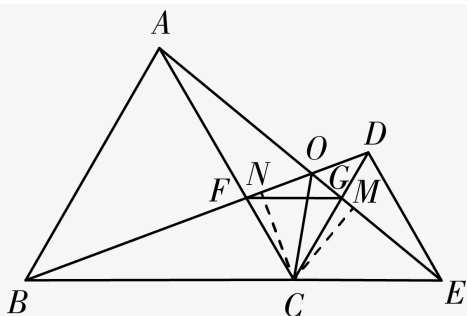
$$\therefore CM \perp AE, CN \perp BD,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle OCN \cong \text{Rt}\triangle OCM \text{ (HL)},$$

$$\therefore \angle BOC = \angle EOC,$$

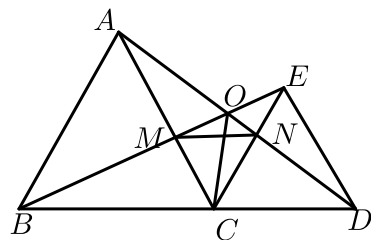
$$\therefore OC \text{ 平分 } \angle BOE, \text{ 故⑤正确；}$$

故正确的是：①③④⑤。



【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

27. 如图所示，已知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$ 均是等边三角形，点 B 、 C 、 D 在同一条直线上， BE 与 AD 交于点 O ， AD 与 CE 交于 N ， AC 与 BE 交于点 M ，连接 OC 、 MN ，则下列结论：① $AD = BE$ ；② $AN = BM$ ；③ $MN \parallel BD$ ；④ $\angle BOC = \angle DOC$ ；⑤ $\triangle CMN$ 为等边三角形；⑥若 $\angle ADE = 20^\circ$ ，则 $\angle BED = 100^\circ$ 。其中正确的结论个数为（ ）。



A. 3个

B. 4个

C. 5个

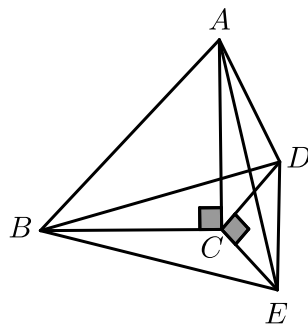
D. 6个

【答案】D

【标注】【知识点】等边三角形的手拉手模型

练习

28. 已知，如图， $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 都是等腰直角三角形， $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$ 。



(1) 求证： $BD = AE$ 。

(2) 若 $\angle ABD = \angle DAE$ ， $AB = 8$ ， $AD = 6$ ，求四边形 $ABED$ 的面积。

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 50 .

【解析】(1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DCE$ 都是等腰直角三角形 ,

$$\therefore AC = BC, CD = CE,$$

$$\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle ACD = \angle DCE + \angle ACD, \text{ 即 } \angle BCD = \angle ACE,$$

在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle ACE$ 中 ,

$$\begin{cases} BC = AC \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore BD = AE.$$

(2) $\because \triangle BCD \cong \triangle ACE,$

$$\therefore \angle CBD = \angle CAE,$$

设 AE 和 BD 相交于点 P , AC 和 BD 相交于点 H ,

$$\therefore \angle CBH + \angle BHC = 90^\circ, \angle BHC = \angle AHD,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle AHD = 90^\circ, \text{ 即 } \angle APH = 90^\circ$$

$$\therefore \angle EAP + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle BAP + \angle DAE = 90^\circ, \text{ 即 } \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore AB = 8, AD = 6,$$

$$\therefore BD = AE = 10,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} ABED} = \frac{10 \times 10}{2} = 50.$$

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

29. 如图, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形, $\angle BAC = \angle DAE = 90^\circ$, 连接 CE 交 AD 于点 F , 连接 BD 交 CE 于点 G , 连接 BE . 下列结论中, 正确的结论有 () .

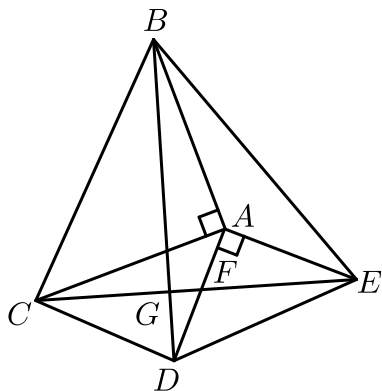
① $CE = BD$;

② $\triangle ADC$ 是等腰直角三角形 ;

③ $\angle ADB = \angle AEB$;

④ $S_{\text{四边形} BCDE} = \frac{1}{2} BD \cdot CE$;

⑤ $BC^2 + DE^2 = BE^2 + CD^2$.



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是等腰直角三角形，

$$\therefore AB = AC, AD = AE,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD,$$

$$\angle CAE = \angle DAE + \angle CAD = 90^\circ + \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAE,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (\text{SAS}),$$

$$\therefore CE = BD, \text{故①正确};$$

$$\angle ABD = \angle ACE,$$

$$\therefore \angle BCG + \angle CBG = \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\text{在} \triangle BCG \text{中}, \angle BGC = 180^\circ - (\angle BCG + \angle CBG) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore BD \perp CE,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BCDE} = \frac{1}{2} BD \cdot CE, \text{故④正确};$$

$$\text{由勾股定理, 在} \text{Rt} \triangle BCG \text{中}, BC^2 = BG^2 + CG^2,$$

$$\text{在} \text{Rt} \triangle DEG \text{中}, DE^2 = DG^2 + EG^2,$$

$$\therefore BC^2 + DE^2 = BG^2 + CG^2 + DG^2 + EG^2,$$

$$\text{在} \text{Rt} \triangle BGE \text{中}, BE^2 = BG^2 + EG^2,$$

$$\text{在} \text{Rt} \triangle CDG \text{中}, CD^2 = CG^2 + DG^2,$$

$$\therefore BE^2 + CD^2 = BG^2 + CG^2 + DG^2 + EG^2,$$

$$\therefore BC^2 + DE^2 = BE^2 + CD^2, \text{故⑤正确};$$

$$\text{只有} AE \parallel CD \text{时}, \angle AEC = \angle DCE,$$

$$\angle ADC = \angle ADB + \angle BDC = 90^\circ,$$

无法说明 $AE \parallel CD$ ，故②错误；

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle AEC,$$

$\therefore \angle AEC$ 与 $\angle AEB$ 相等无法证明，

$\therefore \angle ADB = \angle AEB$ 不一定成立，故③错误；

综上所述，正确的结论有①④⑤，共3个．

故选：C．

【标注】【知识点】等腰直角三角形的手拉手模型

30. 如图1，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， E 是边 AC 上任意一点（点 E 与点 A 、 C 不重合），以 CE 为一直角边作 $\text{Rt}\triangle ECD$ ， $\angle ECD = 90^\circ$ ，连接 BE ， AD ．

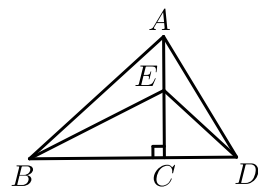


图 1

- (1) 若 $CA = CB$ ， $CE = CD$ ，

①猜想线段 BE ， AD 之间的数量关系及所在直线的位置关系，直接写出结论；

②现将图1中的 $\text{Rt}\triangle ECD$ 绕着点 C 顺时针旋转锐角 α ，得到图2，请判断①中的结论是否仍然成立，若成立，请证明；若不成立，请说明理由．

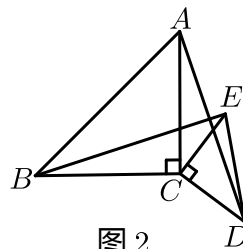


图 2

- (2) 若 $CA = 8$ ， $CB = 6$ ， $CE = 3$ ， $CD = 4$ ， $\text{Rt}\triangle ECD$ 绕着点 C 顺时针旋转锐角 α ，如图3，连接 BD ， AE ，计算 $BD^2 + AE^2$ 的值．

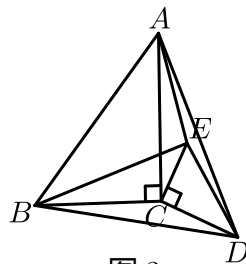


图 3

【答案】(1) ① $BE = AD$, $BE \perp AD$.

② 结论成立, 证明见解析.

(2) $BD^2 + AE^2 = 125$.

【解析】(1) ① $BE = AD$, $BE \perp AD$;

② $BE = AD$, $BE \perp AD$ 仍然成立;

设 BE 与 AC 的交点为点 F , BE 与 AD 的交点为点 G , 如图1.

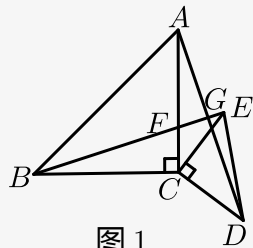


图 1

$$\because \angle ACB = \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE.$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACD = \angle BCE, \\ CD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE.$$

$$\therefore AD = BE, \angle CAD = \angle CBE.$$

$$\because \angle BFC = \angle AFG, \angle BFC + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFG + \angle CAD = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AGF = 90^\circ.$$

$$\therefore BE \perp AD.$$

(2) 设 BE 与 AC 的交点为点 F , BE 的延长线与 AD 的交点为点 G , 如图2.

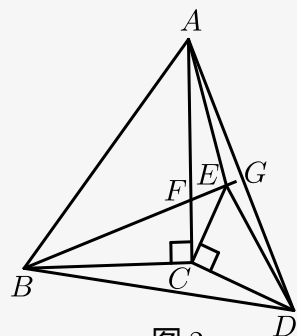


图 2

$$\because \angle ACB = \angle ECD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE.$$

$$\because CA = 8, CB = 6, CE = 3, CD = 4,$$

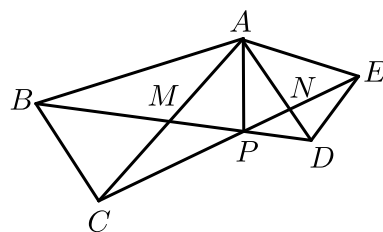
$$\begin{aligned}
&\therefore \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{CE} = \frac{4}{3} . \\
&\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE . \\
&\therefore \angle CAD = \angle CBE . \\
&\because \angle BFC = \angle AFG , \angle BFC + \angle CBE = 90^\circ , \\
&\therefore \angle AFG + \angle CAD = 90^\circ . \\
&\therefore \angle AGF = 90^\circ . \\
&\therefore BG \perp AD . \\
&\therefore \angle AGE = \angle BGD = 90^\circ . \\
&\therefore AE^2 = AG^2 + EG^2 , BD^2 = BG^2 + DG^2 . \\
&\therefore BD^2 + AE^2 = AG^2 + EG^2 + BG^2 + DG^2 . \\
&\because AG^2 + BG^2 = AB^2 , EG^2 + DG^2 = ED^2 , \\
&\therefore BD^2 + AE^2 = AB^2 + ED^2 = CA^2 + CB^2 + CD^2 + CE^2 = 125 .
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

练习

31. 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 与等腰 $\triangle ADE$ ， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE = \alpha$ ，连接 BD 和 CE 相交于点 P ，交 AC 于点 M ，交 AD 与点 N ，下列结论：

- ① $BD = CE$ ；
- ② $\angle BPE = 180^\circ - 2\alpha$ ；
- ③ AP 平分 $\angle BPE$ ；
- ④ 若 $\alpha = 60^\circ$ ，则 $PE = AP + PD$ ．其中一定正确的结论的个数是（ ）．



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】C

【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE = \alpha$ ，
 $\therefore \angle BAD = \angle CAE$ ，且 $AB = AC$ ， $AD = AE$ ，
 $\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE$ (SAS)，
 $\therefore BD = CE$ ，故①符合题意；

$$\because \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle ACE,$$

$$\because \angle BAC = \alpha,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \alpha,$$

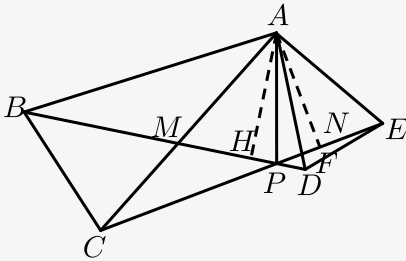
$$\because \angle BPE = \angle PBC + \angle PCB$$

$$= \angle PBC + \angle ACB + \angle ACP$$

$$= \angle PBC + \angle ACB + \angle ABP,$$

$$\therefore \angle BPE = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \alpha, \text{ 故②不符合题意;}$$

如图, 过点A作 $AH \perp BD$, $AF \perp CE$,



$$\because \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

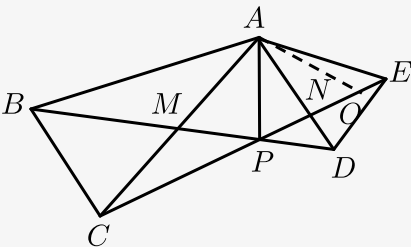
$$\therefore S_{\triangle BAD} = S_{\triangle CAE},$$

$$\therefore \frac{1}{2}BD \times AH = \frac{1}{2}CE \times AF, \text{ 且 } BD = CE,$$

$$\therefore AH = AF, \text{ 且 } AH \perp BD, AF \perp CE,$$

$$\therefore AP \text{ 平分 } \angle BPE, \text{ 故③符合题意;}$$

如图, 在线段PE上截取 $OE = PD$, 连接AO,



$$\because \triangle BAD \cong \triangle CAE,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA, \text{ 且 } OE = PD, AE = AD,$$

$$\therefore \triangle AOE \cong \triangle APD (\text{SAS}),$$

$$\therefore AP = AO,$$

$$\because \angle BPE = 180^\circ - \alpha = 120^\circ, \text{ 且 } AP \text{ 平分 } \angle BPE,$$

$$\therefore \angle APO = 60^\circ, \text{ 且 } AP = AO,$$

$$\therefore \triangle APO \text{ 是等边三角形,}$$

$$\therefore AP = PO,$$

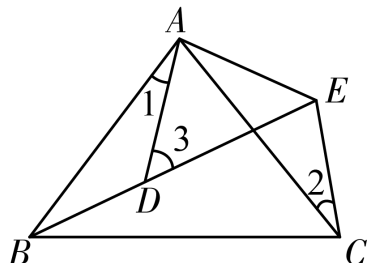
$$\therefore PE = PO + OE,$$

$\therefore PE = AP + PD$ ，故④符合题意．

故选C．

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

32. 如图所示， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\angle 1 = 25^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3 = \underline{\hspace{2cm}}$ ．



【答案】 55°

【解析】解： $\because \angle BAC = \angle DAE$ ，

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC，$$

$$\therefore \angle 1 = \angle EAC，$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle CAE$ 中，

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle EAC \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE (\text{SAS})，$$

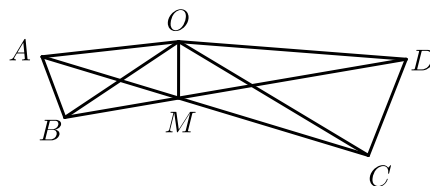
$$\therefore \angle 2 = \angle ABD = 30^\circ，$$

$$\because \angle 1 = 25^\circ，$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle ABD = 25^\circ + 30^\circ = 55^\circ．$$

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

33. 如图，在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中， $OA = OB$ ， $OC = OD$ ， $OA < OC$ ， $\angle AOB = \angle COD = 36^\circ$ ．连接 AC ， BD 交于点 M ，连接 OM ．下列结论：① $\angle AMB = 36^\circ$ ；② $AC = BD$ ；③ OM 平分 $\angle AOD$ ；④ MO 平分 $\angle AMD$ ．其中正确的结论个数有（ ）个．



A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

【答案】 B

【解析】 $\because \angle AOB = \angle COD = 36^\circ$,

$$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC,$$

$$\text{即 } \angle AOC = \angle BOD,$$

在 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 中,

$$\begin{cases} OA = OB \\ \angle AOC = \angle BOD \\ OC = OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle OCA = \angle ODB, AC = BD, \text{故②正确};$$

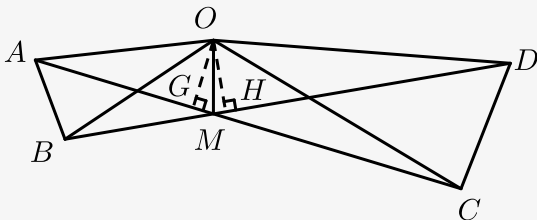
$$\therefore \angle OAC = \angle OBD,$$

由三角形的外角性质得:

$$\angle AMB + \angle OBD = \angle OAC + \angle AOB,$$

$$\therefore \angle AMB = \angle AOB = 36^\circ, \text{故①正确};$$

作 $OG \perp AM$ 于 G , $OH \perp DM$ 于 H , 如图所示,



$$\text{则 } \angle OGA = \angle OHB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \cong \triangle BOD,$$

$$\therefore OG = OH,$$

$$\therefore MO \text{ 平分 } \angle AMD, \text{ 故④正确};$$

假设 OM 平分 $\angle AOD$, 则 $\angle DOM = \angle AOM$,

在 $\triangle AMO$ 与 $\triangle DMO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOM = \angle DOM \\ OM = OM \\ \angle AMO = \angle DMO \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AMO \cong \triangle DMO (\text{ASA}),$$

$$\therefore AO = OD,$$

$$\therefore OC = OD,$$

$$\therefore OA = OC,$$

而 $OA < OC$, 故③错误.

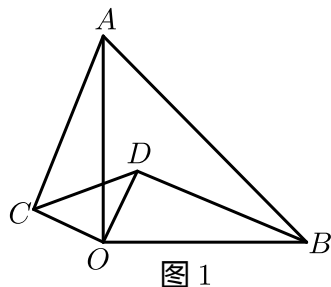
正确的个数有3个.

故选B.

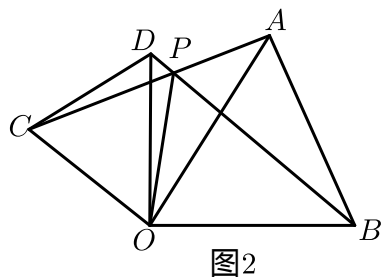
【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型

34. 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中, $OA = OB$, $OC = OD$, $\angle AOB = \angle COD = \alpha$.

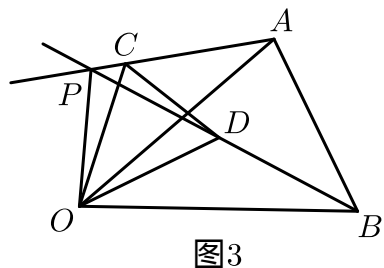
(1) 如图1, 若 $\alpha = 90^\circ$, 请探究 AC 和 BD 的关系.



(2) 如图2, AC 和 BD 相交于点 P , 求 $\angle BPO$ (用含 α 的式子表示).



(3) 如图3所示, AC 和 BD 相交于点 P , 求 $\angle BPO$ (用含 α 的式子表示).



【答案】(1) $AC = BD$; $AC \perp BD$.

$$(2) \angle BPO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

$$(3) \angle BPO = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

【解析】(1) $\triangle OAC \cong \triangle OBD$,

$$\therefore AC = BD, \angle OAC = \angle OBD, AC \perp BD.$$

(2) $\triangle OAC \cong \triangle OBD$,

$$\therefore AC = BD, S_{\triangle OAC} = S_{\triangle OBD}, \angle OAC = \angle OBD,$$

$$\therefore \angle APB = \angle AOB = \alpha, \therefore \angle BPC = 180^\circ - \alpha,$$

过 O 作 $OM \perp PB$ 于 M , $ON \perp PC$ 于 N , 易证

$$\angle BPO = \angle CPO = \frac{1}{2} \angle BPC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

(3) 略.

【标注】【知识点】等腰三角形的手拉手模型